



# Zadanie: CNF

## CNF-SAT [B]

Potyczki Algoritmiczne 2016, runda 5. Dostępna pamięć: 256 MB.

25.11.2016

Zbliża się kolejna Parada Równości  $P = NP$ . W tym roku nieformalny lider ruchu  $P = NP$ , Bajtazar, postanowił ostatecznie uciszyć swoich licznych przeciwników, ogłaszając na Paradzie dowód słynnej równości.

Dowód Bajtazara polega na pokazaniu algorytmu rozwiązującego znany NP-trudny problem *CNF-SAT* w czasie wielomianowym. W tym problemie dane jest  $n$  zmiennych logicznych  $x_1, \dots, x_n$  i formuła logiczna w tak zwanej *koniunkcyjnej postaci normalnej*. Taka formuła jest postaci

$$(l_{1,1} \vee \dots \vee l_{1,q_1}) \wedge (l_{2,1} \vee \dots \vee l_{2,q_2}) \wedge \dots \wedge (l_{m,1} \vee \dots \vee l_{m,q_m}),$$

gdzie każde z wyrażień  $(l_{i,1} \vee \dots \vee l_{i,q_i})$  nazywamy *klauzulą*, a każde spośród wyrażień  $l_{i,j}$  jest *literalem*, czyli pewną zmienną lub zaprzeczeniem pewnej zmiennej spośród danych  $x_1, \dots, x_n$ . Przyjmujemy, że żadna poprawna klauzula *nie zawiera* dwóch identycznych literalów. Dla  $n = m = 3$ , przykładową formułą w koniunkcyjnej postaci normalnej może być  $(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1 \vee x_2)$ .

Problem CNF-SAT polega na rozstrzygnięciu, czy istnieje pewne wartościowanie zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ , dla którego dana formuła jest spełniona (to znaczy, jej wartością logiczną jest prawda).

Niestety, do dokończenia dowodu Bajtazarowi brakuje jednego kroku. Twierdzi on, że udało mu się sprowadzić\* ogólny problem CNF-SAT do jego szczególnego przypadku, gdzie każda klauzula  $C$  danej formuły jest *spójna*, czyli ma następujące własności:

- Dla dowolnego  $i$ ,  $x_i$  i  $\neg x_i$  nie mogą być jednocześnie literalami  $C$ .
- Jeśli  $i, j, k$  są takie, że  $i < j < k$  i zarówno zmienna  $x_i$  (lub jej zaprzeczenie) jak i  $x_k$  (lub  $\neg x_k$ ) występują w klauzuli  $C$ , to  $x_j$  albo  $\neg x_j$  także występuje w  $C$ .

Przykładowo, dla  $n = 3$  klauzule  $(x_2)$  i  $(\neg x_3 \vee \neg x_1 \vee x_2)$  są spójne, a klauzule  $(x_2 \vee \neg x_2)$  i  $(x_1 \vee \neg x_3)$  – nie.

Pomóż Bajtazarowi znaleźć efektywny algorytm rozwiązujący powyższy szczególny przypadek problemu CNF-SAT. Aby jeszcze bardziej go zadziwić, napisz program znajdujący liczbę wartościowań zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  spełniających daną formułę CNF-SAT, składającą się z samych spójnych klauzul.

## Wejście

W pierwszym wierszu wejścia znajduje się liczba całkowita  $n$  ( $1 \leq n \leq 1\,000\,000$ ) oznaczająca liczbę zmiennych. W drugim wierszu wejścia mamy daną formułę CNF-SAT na zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ , składającą się z samych spójnych klauzul. Formuła dana jest w następującym formacie (patrz także przykład poniżej).

- Każda klauzula zaczyna się nawiasem otwierającym  $($ , a kończy nawiasem zamykającym  $)$ .
- Literal  $x_i$  (dla  $1 \leq i \leq n$ ) reprezentowany jest jako  $x_i$ , a literal  $\neg x_i$  jako  $\sim x_i$ , np.  $x_2$  lub  $\sim x_{15}$ .
- Sąsiednie literały w obrębie jednej klauzuli oddzielone są znakiem  $\vee$  (oznaczającym logiczne *lub*) otoczonym z obu stron pojedynczymi spacjami.
- Sąsiednie klauzule oddzielone są znakiem  $\wedge$  (oznaczającym logiczne *i*) otoczonym z obu stron pojedynczymi spacjami.

Sumaryczna liczba literalów we wszystkich klauzulach danej formuły nie przekroczy 1 000 000.

## Wyjście

Na wyjście należy wypisać liczbę wartościowań zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  spełniających daną na wejściu formułę, modulo  $10^9 + 7$ .

## Przykład

Dla danych wejściowych:

3  
(x2) ^ (x3 v ~x2) ^ (x2 v x1 v ~x3)

poprawnym wynikiem jest:

2

**Wyjaśnienie do przykładu:** Dana formuła jest spełniona tylko dla dwóch wartościowań:  $(0, 1, 1)$  i  $(1, 1, 1)$ .

\*Bajtazar zapomniał wspomnieć, czy jego redukcja działała w czasie wielomianowym...